数理解析研究所講究録
566巻 1985年 25-28

P_k-因子について

東理大・理　江川 嘉美（Yoshimi Egawa）

ここでは，有限無向単純グラフのみを考える。

グラフ G の連結成分の個数を $c(G)$ で表す。位数2以上の連結グラフ G に対し，G の極大 nonseparable 部分グラフを，G のブロックと呼ぶ。ここで，位数2以上の連結グラフ B が nonseparable であるとは，すべての $x \in V(G)$ に対して $B-x$ が連結であることを言う。（ブロックに関する詳細は，たとえば，B. Bollobás [1. §I.1] などを参照されたい。）P_k は長さ $k-1$ の path，つまり k 点上の path を表す。

H を連結グラフとする時、グラフ G の部分グラフ F が G の H-因子であるとは，$V(G) = V(F)$ で，F のすべての連結成分が H に同型であることを言う。我々は[2]で次の定理を証明した。（$H = P_2$ の場合は，それ以前に D. P. Sumner [3] により証明されている。）

定理 1.　n, k, p を $n > p$ であるような 2 以上の整数とし，H を位数 k の連結グラフとする。G を位数 nk の連結グラフとし，$V(G)$ の大きさ pk の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H-因子を持つと仮定する。すると，G は H-因子を持つ。

この定理は，$p = 1$ とすると一般には成立しないが、次のことは言える。

定理 2.　$n \geq 2$ を整数とし，$H = P_k$, $k \geq 6$ とする。G を位数 nk の連結グラフとし，$V(G)$ の大きさ k の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H-因子を持つ，つまり，$\langle X \rangle$ は H と同型な全域部分グラフを含む，と仮定する。すると，G は H-因子を持つ。

この定理の証明は，次の 2 つの補題により，かなり容易になされることが判明したので，詳述することは控える。

補題.　G を nonseparable なグラフとし，$a, b \in V(G)$, $a \neq b$ とする。すると，任意の $1 \leq k \leq |G| - 1$ に対し，a を含み b を含まない $V(G)$ の大きさ k の部分集合 X で，$\langle X \rangle$, $G - X$ がともに連結であるものが存在する。

補題. Gは位数6以上の連結グラフで, Gのブロックグラフはpathでないとする。すると, 任意の $6 \le k \le |G|$ に対し, $V(G)$ の大きさ k の部分集合 X で, $\langle X \rangle$ のブロックグラフがpathでないものが存在する。

さて, $H = P_k$, $2 \le k \le 5$ に対しては, 定理2の仮定を満たす G で, 結論が成り立たないようなものを, 簡単に構成できる. 定理2が一般の H に対しては必ずしも成立しないことを示す他の例としては,

$$H = K_{1,k-1}, \quad G = K_{1,2k-1}; \qquad k \ge 2$$

などが挙げられる。大ざっぱに言って, $C(H-X)$ が"大きい"ような $X \in V(G)$ が存在するような H に対しては, 定理2は成り立たない。次の例は, $C(H-X)$ が"小さく"かつ定理2が成立しないような H が無限に存在することを示すものである。

例. $\ell \ge 1$ とし, $4\ell+2$ 個の頂点 $a_1, \cdots, a_{2\ell+1}, b_1, \cdots, b_{2\ell+1}$ 上のグラフ G_ℓ を,

$E(G_\ell) = \{b_i b_j \mid i \ne j,\ 1 \le i, j \le 2\ell+1\} \cup \{a_i b_i \mid 1 \le i \le 2\ell+1\}$

により定め, $2\ell+1$ 個の頂点 $c_1, \cdots, c_\ell, d_1, \cdots, d_\ell, d_{\ell+1}$ 上のグラフ F_ℓ を,

$E(F_\ell) = \{d_i d_j \mid i \ne j,\ 1 \le i, j \le \ell+1\} \cup \{c_i d_i \mid 1 \le i \le \ell\}$

により定める。今，HをH_ℓの任意の連結全域部分グラフとし，$G = G_k$とすると，定理2の仮定は（“$H = P_k$, $k \geq 6$”という部分を除いて）満たされているが，結論は成立していないことがわかる。

注意.　定理2において，条件“$H = P_k$, $k \geq 6$”を弱くして，“Hは位数 $k \geq 6$ の連結グラフで，すべての $x \in V(H)$ に対して $c(H-x) \leq 2$”とした時，定理が成り立たなくなるようなHは，上記の“例”に現われるグラフで尽きていると思われるが，現時点では未解決である。なお，そこまでは弱くせず，“Hは位数 $k \geq 6$ の連結グラフで，Hのブロックグラフがpath”とするのであれば，定理は成立する。そのことは，やはり，上の2つの補題を使って確かめられる。

1. B. Bollobás, "Extremal Graph Theory," Academic Press, London, 1978.

2. Y. Egawa, H. Enomoto and A. Saito, On component factors, Graphs and Combinatorics, to appear.

3. D. P. Sumner, Graphs with 1-factors, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 8-12.